

2025年 概率统计与随机过程（智） 参考答案

一，选择题

1. 下列属于假命题的是：

- A. $P(A|B) = P(A) \longrightarrow P(A|\bar{B}) = P(A)$
- B. $P(A|B) > P(A) \longrightarrow P(\bar{A}|\bar{B}) > P(\bar{A})$
- C. $P(A|B) > P(A|\bar{B}) \longrightarrow P(A|B) > P(A)$
- D. $P(A|A \cup B) > P(\bar{A}|A \cup B) \longrightarrow P(A) > P(\bar{A})$

答案

D

解析

A项：条件与结论均等价于 $P(AB) = P(A)P(B)$ ，为真。

B项：条件与结论均等价于 $P(AB) > P(A)P(B)$ ，为真。

C项：条件与结论均等价于 $P(AB) > P(A)P(B)$ ，为真。

D项：条件等价于 $P(A) > P(\bar{A}B)$ ，结论等价于 $P(A) > 0.5$ ，两者不等价，为假。

2. $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 符合 $\lambda = 1/2$ 的泊松分布，则

$$P\left\{\frac{2\sum_{i=1}^n X_i - n}{2\sqrt{n}} \leq 1\right\} = \underline{\hspace{2cm}}$$

- A. $\Phi(0.5)$
- B. $\Phi(\sqrt{2})$
- C. $\Phi(\sqrt{3})$
- D. $\Phi(0)$

答案

B

解析

1. 求单个变量的均值与方差：

因 $X_i \sim P(\frac{1}{2})$ ，故：

$$E[X_i] = \frac{1}{2}, \quad \text{Var}(X_i) = \frac{1}{2}$$

2. 根据中心极限定理 (CLT) 构造标准正态分布：

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - E[\sum X_i]}{\sqrt{\text{Var}(\sum X_i)}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \sim N(0, 1)$$

3. 化简已知不等式：

$$\frac{2 \sum_{i=1}^n X_i - n}{2\sqrt{n}} \leq 1 \implies \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} \leq 1$$

两边同乘以 $\sqrt{2}$ 以配凑标准正态变量 Z 的分母：

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \leq \sqrt{2} \implies Z \leq \sqrt{2}$$

故该概率为 $P(Z \leq \sqrt{2}) = \Phi(\sqrt{2})$ 。

3. 下列是正确选项的是？

- A 若以 $\alpha = 0.05$ 水平拒绝原假设，则以 $\alpha = 0.01$ 水平必拒绝原假设
- B 若以 $\alpha = 0.05$ 水平拒绝原假设，则以 $\alpha = 0.01$ 水平必接受原假设
- C 若以 $\alpha = 0.05$ 水平接受原假设，则以 $\alpha = 0.01$ 水平必拒绝原假设
- D 若以 $\alpha = 0.05$ 水平接受原假设，则以 $\alpha = 0.01$ 水平必接受原假设

答案

D

解析

利用 p 值 (p -value) 判定最简便 (显著性水平 α 越小，拒绝域越窄，越难拒绝)：

- **D项 (真)：** 0.05 水平接受 $\Rightarrow p\text{-value} \geq 0.05 \Rightarrow p\text{-value} > 0.01 \Rightarrow 0.01$ 水平必接受。
- **A项 (假)：** 反例：若 $p\text{-value} = 0.03$ ，在 0.05 水平拒绝，但在 0.01 水平接受。
- **B项 (假)：** 反例：若 $p\text{-value} = 0.005$ ，在两个水平下都拒绝。
- **C项 (假)：** 由D项可知， 0.05 水平接受， 0.01 水平必定也是接受。

4.未回忆

5.判断某个函数是不是谱函数。

要成为一个实平稳随机过程的**谱密度函数**（常称谱函数），必须同时满足以下 **4 个**条件：

- 1. **实函数**
- 2. **偶函数**
- 3. **非负性**： $S(\omega) \geq 0$
- 4. **可积性**： $\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)d\omega < \infty$

二，填空题

1.已知随机变量 X, Y 满足： $E(X) = 1, \quad E(Y) = 0, E(X^2) = E(Y^2) = 4, \text{Cov}(X, Y) = 2$ 求 $\text{Cov}(X + Y, X - Y)$ 的值。

答案

-1

解析

展开协方差公式：

$$\text{Cov}(X + Y, X - Y) = \text{Var}(X) - \text{Var}(Y)$$

计算方差：

- $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 4 - 1^2 = 3$
 - $\text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 4 - 0^2 = 4$
- $$3 - 4 = -1$$

2.设 $X_1, X_2 \sim N(0, \sigma^2)$ 且相互独立，则 $\left(\frac{X_1+X_2}{X_1-X_2}\right)^2$ 服从的分布为 _____。

答案

$F(1, 1)$

解析

定义新变量并证独立：

令 $U = X_1 + X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$, $V = X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$ 。
计算协方差： $\text{Cov}(U, V) = \text{Var}(X_1) - \text{Var}(X_2) = \sigma^2 - \sigma^2 = 0$ 。
因联合正态且不相关，故 U 与 V 相互独立。

标准化构造 F 分布：

将分子分母同时除以标准差 $\sqrt{2}\sigma$ 进行标准化：

$$\left(\frac{X_1 + X_2}{X_1 - X_2}\right)^2 = \frac{U^2}{V^2} = \frac{\left(\frac{U}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}{\left(\frac{V}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} = \frac{\chi^2(1)/1}{\chi^2(1)/1} \sim F(1, 1)$$

3.甲、乙两箱各装有 2 个红球和 2 个白球。现从甲箱中任取一球放入乙箱中，再从乙箱中任取一球。设 X, Y 分别为从甲、乙箱中取出的红球个数，求相关系数 $\rho(X, Y)$ 。

答案

$$\frac{1}{5}$$

解析

求 X 的均值和方差

X 表示从甲箱（2红2白）中取出的红球数，属于 0-1 变量：

- $P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- $P(X = 0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$E[X] = \frac{1}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

求 Y 的均值和方差

Y 的概率受 X 的结果影响，由全概率公式展开：

- 若 $X = 1$ （放红球入乙），乙箱变为 3红2白： $P(Y = 1|X = 1) = \frac{3}{5}$
- 若 $X = 0$ （放白球入乙），乙箱变为 2红3白： $P(Y = 1|X = 0) = \frac{2}{5}$

联合求出 $P(Y = 1)$ ：

$$P(Y = 1) = P(Y = 1|X = 1)P(X = 1) + P(Y = 1|X = 0)P(X = 0) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2}$$

同理， Y 也是参数为 $\frac{1}{2}$ 的 0-1 变量：

$$E[Y] = \frac{1}{2}, \quad \text{Var}(Y) = \frac{1}{4}$$

计算协方差 $\text{Cov}(X, Y)$

因为 X, Y 只能取 0 或 1，所以 $XY = 1$ 当且仅当 $X = 1$ 且 $Y = 1$ ：

$$E[XY] = P(X = 1, Y = 1) = P(Y = 1|X = 1)P(X = 1) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

计算相关系数 $\rho(X, Y)$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\frac{1}{20}}{\sqrt{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{5}$$

4. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots, X_{n+m} \sim N(0, \sigma^2)$ 且相互独立。问当 $a =$ _____ 时，

$$\frac{a \sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2}} \sim t(m)$$

答案

$$\sqrt{\frac{m}{n}}$$

解析

要构造自由度为 m 的 t 分布，其标准形式应为： $T = \frac{Z}{\sqrt{Y/m}}$ ，其中 $Z \sim N(0, 1)$ ， $Y \sim \chi^2(m)$ 且相互独立。

1. 构造分子（标准正态分布 Z ）：

因 $\sum_{i=1}^n X_i \sim N(0, n\sigma^2)$ ，标准化得：

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n\sigma}} \sim N(0, 1)$$

2. 构造分母（卡方分布 Y ）：

因 $\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0, 1)$ ，独立平方和构成卡方分布：

$$Y = \sum_{i=n+1}^{n+m} \left(\frac{X_i}{\sigma} \right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2 \sim \chi^2(m)$$

3. 代入 t 分布公式：

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/m}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{m\sigma^2} \sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2}}$$

分子分母同时约去 σ ，并将系数提到最前面：

$$T = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i}{\frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2}} = \frac{\sqrt{\frac{m}{n}} \sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+m} X_i^2}}$$

对比原式，即得 $a = \sqrt{\frac{m}{n}}$ 。

5. 已知平稳随机过程的功率谱密度为 $S(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 2}$ ，求其平均功率。

答案

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

解析

平均功率与功率谱密度的关系为：

$$P = R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega$$

我们可以利用**留数定理**来计算这个广义积分 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 2} d\omega$ ：

确定复平面上的奇点

令分母为 0： $z^4 + 3z^2 + 2 = (z^2 + 1)(z^2 + 2) = 0$

得到四个孤立奇点（均为一阶极点）： $z = \pm i, \pm\sqrt{2}i$ 。

其中位于**上半复平面**的极点为： $z_1 = i, z_2 = \sqrt{2}i$ 。

计算上半平面的留数

对于 $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+2)}$ ：

- 在 $z_1 = i$ 处的留数：

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \frac{z^2}{(z + i)(z^2 + 2)} \Big|_{z=i} = \frac{-1}{2i \cdot 1} = \frac{i}{2}$$

• 在 $z_2 = \sqrt{2}i$ 处的留数:

$$\operatorname{Res}(f, \sqrt{2}i) = \lim_{z \rightarrow \sqrt{2}i} (z - \sqrt{2}i)f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z + \sqrt{2}i)} \Big|_{z=\sqrt{2}i} = \frac{-2}{-1 \cdot 2\sqrt{2}i} = -\frac{\sqrt{2}i}{2}$$

计算积分值

根据留数定理, 实轴上的积分等于上半平面所有留数之和的 $2\pi i$ 倍:

$$I = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, \sqrt{2}i) \right] = 2\pi i \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{2} i \right) = (\sqrt{2} - 1)\pi$$

求平均功率

$$P = \frac{1}{2\pi} I = \frac{(\sqrt{2} - 1)\pi}{2\pi} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

三, 解答题

1. 设 X_1, X_2, X_3 独立同分布, 均服从区间 $(0, \theta)$ 上的均匀分布 $U(0, \theta)$ 。

1. 验证 $\frac{4}{3}X_{(3)}$ 与 $4X_{(1)}$ 均为 θ 的无偏估计。
2. 比较这两个估计量的有效性。

解答

由于 $X_i \sim U(0, \theta)$, 其概率密度函数为 $f(x) = \frac{1}{\theta}$, 累积分布函数为 $F(x) = \frac{x}{\theta}$ (其中 $0 \leq x \leq \theta$)。

本题中样本量 $n = 3$ 。

一、验证无偏性

1. 对于最大观测值 $X_{(3)}$

$X_{(3)}$ 的概率密度函数为:

$$f_{(3)}(x) = 3[F(x)]^2 f(x) = 3 \left(\frac{x}{\theta} \right)^2 \cdot \frac{1}{\theta} = \frac{3x^2}{\theta^3} \quad (0 \leq x \leq \theta)$$

计算其数学期望:

$$E[X_{(3)}] = \int_0^\theta x \cdot \frac{3x^2}{\theta^3} dx = \frac{3}{\theta^3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^\theta = \frac{3}{4}\theta$$

因此：

$$E\left[\frac{4}{3}X_{(3)}\right] = \frac{4}{3}E[X_{(3)}] = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\theta = \theta$$

结论： $\frac{4}{3}X_{(3)}$ 是 θ 的无偏估计。

2. 对于最小观测值 $X_{(1)}$

$X_{(1)}$ 的概率密度函数为：

$$f_{(1)}(x) = 3[1 - F(x)]^2 f(x) = 3\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{\theta} = \frac{3}{\theta}\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^2 \quad (0 \leq x \leq \theta)$$

计算其数学期望：

$$E[X_{(1)}] = \int_0^\theta x \cdot \frac{3}{\theta}\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^2 dx$$

令 $u = 1 - \frac{x}{\theta}$ ，则 $x = \theta(1 - u)$ ， $dx = -\theta du$ ：

$$E[X_{(1)}] = 3\theta \int_0^1 (1 - u)u^2 du = 3\theta \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\theta$$

因此：

$$E[4X_{(1)}] = 4E[X_{(1)}] = 4 \cdot \frac{1}{4}\theta = \theta$$

结论： $4X_{(1)}$ 也是 θ 的无偏估计。

二、比较有效性

有效性通过比较无偏估计量的**方差**来确定，方差越小越有效。

1. 计算 $Var\left(\frac{4}{3}X_{(3)}\right)$

首先计算 $X_{(3)}$ 的二阶矩：

$$E[X_{(3)}^2] = \int_0^\theta x^2 \cdot \frac{3x^2}{\theta^3} dx = \frac{3}{\theta^3} \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^\theta = \frac{3}{5}\theta^2$$

计算方差：

$$Var(X_{(3)}) = E[X_{(3)}^2] - (E[X_{(3)}])^2 = \frac{3}{5}\theta^2 - \left(\frac{3}{4}\theta\right)^2 = \frac{3}{5}\theta^2 - \frac{9}{16}\theta^2 = \frac{3}{80}\theta^2$$

所以：

$$Var\left(\frac{4}{3}X_{(3)}\right) = \frac{16}{9}Var(X_{(3)}) = \frac{16}{9} \cdot \frac{3}{80}\theta^2 = \frac{1}{15}\theta^2$$

2. 计算 $Var(4X_{(1)})$

首先计算 $X_{(1)}$ 的二阶矩 (同样利用换元 $u = 1 - \frac{x}{\theta}$):

$$E[X_{(1)}^2] = \int_0^{\theta} x^2 \cdot \frac{3}{\theta} \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^2 dx = 3\theta^2 \int_0^1 (1-u)^2 u^2 du = 3\theta^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{10}\theta^2$$

计算方差:

$$Var(X_{(1)}) = E[X_{(1)}^2] - (E[X_{(1)}])^2 = \frac{1}{10}\theta^2 - \left(\frac{1}{4}\theta\right)^2 = \frac{1}{10}\theta^2 - \frac{1}{16}\theta^2 = \frac{3}{80}\theta^2$$

So:

$$Var(4X_{(1)}) = 16Var(X_{(1)}) = 16 \cdot \frac{3}{80}\theta^2 = \frac{3}{5}\theta^2 = \frac{9}{15}\theta^2$$

显然:

$$Var\left(\frac{4}{3}X_{(3)}\right) = \frac{1}{15}\theta^2 < \frac{9}{15}\theta^2 = Var(4X_{(1)})$$

由于 $\frac{4}{3}X_{(3)}$ 的方差更小, 因此 $\frac{4}{3}X_{(3)}$ 比 $4X_{(1)}$ 更有效。

2. 设总体 X 的概率密度函数为:

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数。 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自该总体的样本。求 θ 的:

1. 矩估计量
2. 极大似然估计量

解析

1. 矩估计量

矩估计的核心思想是用样本一阶原点矩 (样本均值 $\bar{X}$) 代替总体一阶原点矩 (数学期望 $E[X]$)。

第一步: 计算总体数学期望 $E[X]$

$$E[X] = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\theta^2} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} dx$$

令 $t = \frac{x^2}{2\theta^2}$, 则 $x = \theta\sqrt{2t}$, $dx = \frac{\theta}{\sqrt{2t}} dt$ 。代入积分式中:

$$E[X] = \int_0^{\infty} 2t \cdot e^{-t} \cdot \frac{\theta}{\sqrt{2t}} dt = \sqrt{2}\theta \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

利用伽马函数 $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$ 以及 $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$:

$$E[X] = \sqrt{2}\theta \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{2}\theta \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \theta\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

第二步：令样本矩等于总体矩

$$\bar{X} = \theta\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

解得 θ 的矩估计量为：

$$\hat{\theta}_M = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \bar{X} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

2. 极大似然估计法

第一步：构造似然函数 $L(\theta)$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta^2} e^{-\frac{x_i^2}{2\theta^2}} \right) = \theta^{-2n} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) e^{-\frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

第二步：取对数似然函数 $\ln L(\theta)$

$$\ln L(\theta) = -2n \ln \theta + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

第三步：对 θ 求导并令导数为 0（似然方程）

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^3} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

解该方程：

$$\frac{1}{\theta^3} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{2n}{\theta} \implies \theta^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

解得 θ 的极大似然估计量为：

$$\hat{\theta}_{MLE} = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$$

3.假设检验。给了总体均值和具体数据，要求检验方差。

解析

构造枢轴量：

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

对给定的 α ，检验 χ^2 是否落入拒绝域。

4.参数估计。估计方差比，只知道两组数据的样本方差，要求给出置信区间、置信上限、置信下限。

解析

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

5.设随机过程 $X(t) = A \cos(\xi t + \phi)$ ，其中 A 为常数，随机变量 ξ 与 ϕ 相互独立。

- ϕ 服从区间 $(0, 2\pi)$ 上的均匀分布，即 $\phi \sim U(0, 2\pi)$ ；
- ξ 服从标准柯西分布，其概率密度函数为 $f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ， $x \in (-\infty, +\infty)$ 。

求该随机过程的**均值函数** $m_X(t)$ 和**协方差函数** $C_X(s, t)$ 。

答案

- **均值函数：**

$$m_X(t) = 0$$

- **协方差函数：**

$$C_X(s, t) = \frac{A^2}{2} e^{-|s-t|}$$

解析

一、求均值函数 $m_X(t)$

根据定义，利用全期望公式先对 ϕ 求条件期望（此时将 ξ 暂视为常数）：

$$m_X(t) = E[X(t)] = E_\xi \left[E_\phi [A \cos(\xi t + \phi) \mid \xi] \right]$$

由于 $\phi \sim U(0, 2\pi)$ ，其密度函数为 $\frac{1}{2\pi}$ ，余弦函数在一个完整周期内的积分恒为 0：

$$E_\phi [\cos(\xi t + \phi) \mid \xi] = \int_0^{2\pi} \cos(\xi t + \phi) \cdot \frac{1}{2\pi} d\phi = 0$$

内部期望为 0，外层对 ξ 求期望同样为 0，故：

$$m_X(t) = 0$$

二、求协方差函数 $C_X(s, t)$

由于均值 $m_X(t) = 0$ ，协方差函数等价于互相关函数：

$$C_X(s, t) = E[X(s)X(t)] = A^2 E[\cos(\xi s + \phi) \cos(\xi t + \phi)]$$

1. 积化和差消去 ϕ

利用三角公式将乘积展开：

$$\cos(\xi s + \phi) \cos(\xi t + \phi) = \frac{1}{2} [\cos(\xi(s - t)) + \cos(\xi(s + t) + 2\phi)]$$

代入期望中，由于第二项含有 2ϕ ，在 $(0, 2\pi)$ 上积分两圈，对 ϕ 的期望依然为 0。因此：

$$C_X(s, t) = \frac{A^2}{2} E[\cos(\xi(s - t))]$$

2. 引入复数域求解 $E[\cos(\xi(s - t))]$

令 $u = s - t$ ，我们需要计算积分：

$$E[\cos(u\xi)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ux)}{\pi(1+x^2)} dx$$

为了绕开实变函数的死胡同，我们引入虚部 $i \sin(ux)$ 。注意到 $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ 是偶函数，而 $\sin(ux)$ 是奇函数，奇偶相乘在对称区间上的积分为 0（即其期望为 0）：

$$iE[\sin(u\xi)] = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ux)}{\pi(1+x^2)} dx = 0$$

所以，我们可以直接将实部与虚部合并为复指数 e^{iux} ：

$$E[\cos(u\xi)] = E[\cos(u\xi)] + iE[\sin(u\xi)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux}}{\pi(1+x^2)} dx$$

3. 利用复变函数留数定理手撕积分

将积分延拓到复平面 z 上，考察函数 $g(z) = \frac{e^{iuz}}{\pi(1+z^2)} = \frac{e^{iuz}}{\pi(z+i)(z-i)}$ ，其孤立奇点为 $z = \pm i$ 。

• 当 $u \geq 0$ 时:

在上半平面围成一个包含 $z = i$ 的大半圆弧积分围道。根据留数定理, 该积分等于奇点 $z = i$ 处的留数乘以 $2\pi i$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(g, i) &= \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{e^{iuz}}{\pi(z + i)(z - i)} = \frac{e^{-u}}{2\pi i} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux}}{\pi(1 + x^2)} dx &= 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(g, i) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-u}}{2\pi i} = e^{-u}\end{aligned}$$

• 当 $u < 0$ 时:

同理在下半平面建立围道 (包含奇点 $z = -i$), 或者直接根据函数的偶对称性, 可得积分结果为 e^u 。

综合两段结果, 该积分值为:

$$E[\cos(u\xi)] = e^{-|u|} = e^{-|s-t|}$$

6. 在一条马路上红车, 黄车, 绿车分别通过某一路口服从强度为 3, 4, 5 泊松过程。

- (1) 求第一辆车到达路口平均时间, 求第一辆红车通过路口平均时间
- (2) 求红车第一个通过路口的概率, 求相继两辆红车之间有 k 辆车通过的概率为?

解析

泊松过程性质如下:

- $m_N(t) = D_N(t) = \lambda t$, $C_N(s, t) = \lambda \min(s, t)$, $R_N(s, t) = \lambda \min(s, t) + \lambda^2 st$
- 任意长度为 t 的时段内, 事件发生次数具有平稳独立增量性, 且 $N \sim P(\lambda t)$ 。
- 总过程按概率 p_i 独立分流, 各子类别构成强度为 λp_i 的独立泊松过程。
- 事件发生的时间间隔序列 $\{T_n\}$ 独立同分布, 且均服从指数分布 $Exp(\lambda)$ 。

根据题意, 红车、黄车、绿车的通过分别服从强度为 $\lambda_r = 3$, $\lambda_y = 4$, $\lambda_g = 5$ 的独立泊松过程。

由性质 3 的逆性质 (独立泊松过程的叠加性) 可知, 马路上所有车流通过的总过程也是一个泊松过程, 其强度为各颜色车流强度之和:

$$\lambda_{\text{total}} = \lambda_r + \lambda_y + \lambda_g = 3 + 4 + 5 = 12$$

(1) 第一辆车与第一辆红车的平均到达时间

• 第一辆车到达路口的平均时间:

第一辆车到达代表总车流泊松过程中的第一次事件发生。根据性质 4, 事件发生的时间间隔服从指数分布。因此总车流的第一辆车到达时间 $T_1 \sim Exp(\lambda_{\text{total}} = 12)$ 。

其数学期望 (平均时间) 为:

$$E[T_1] = \frac{1}{\lambda_{\text{total}}} = \frac{1}{12}$$

• **第一辆红车通过路口的平均时间：**

单独看红车流，它是一个强度 $\lambda_r = 3$ 的泊松过程。第一辆红车到达的时间 $T_{1,r} \sim \text{Exp}(\lambda_r = 3)$ 。
其平均时间为：

$$E[T_{1,r}] = \frac{1}{\lambda_r} = \frac{1}{3}$$

(2) 红车首先通过的概率与相继两辆红车之间的车流量

• **红车第一个通过路口的概率：**

根据**性质 3（竞争与分流性质）**，任何一辆通过路口的车属于红车的概率，等于红车流强度占总强度的比例：

$$P(\text{第一辆是红车}) = \frac{\lambda_r}{\lambda_{\text{total}}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

• **相继两辆红车之间有 k 辆车通过的概率：**

我们可以将总车流看作一系列独立的随机试验。每通过一辆车，是红车的概率为 $p = \frac{1}{4}$ ，不是红车（黄或绿）的概率为 $1 - p = \frac{3}{4}$ 。

“两辆红车之间有 k 辆车”意味着：在下一辆红车出现之前，连续出现了 k 辆非红车，第 $k + 1$ 辆车恰好又是红车。

这符合**几何分布**的模型，其概率为：

$$P(X = k) = (1 - p)^k \cdot p = \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \frac{1}{4} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$7. X(t) = A \cos[\omega t + \phi], E(A) = 2, D(A) = 4$$

$$\omega \sim U(-5, 5)$$

$$\phi \sim U(-\pi, \pi)$$

验证 $X(t)$ 为平稳过程。

解析

宽平稳过程完整的判定条件有 3 个：

1. **二阶矩有限（隐藏条件）**：对任意 t ，均有 $E[X^2(t)] < \infty$ （这保证了方差和自相关函数存在且不为无穷大）。
2. **均值函数为常数**： $m_X(t) = E[X(t)] = c$ 。
3. **自相关函数只与时间差 $\tau = |s - t|$ 有关**： $R_X(s, t) = R_X(\tau)$ 。

补充：如果是**严平稳过程（强平稳）**，条件则是它的任意 n 维联合概率密度函数在时间轴上平移后保持不变。

假设随机变量 A, ω, ϕ 之间相互独立。

1. 验证均值函数为常数

$$m_X(t) = E[A \cos(\omega t + \phi)] = E[A] \cdot E[\cos(\omega t + \phi)]$$

因为 $\phi \sim U(-\pi, \pi)$ ，对 ϕ 先求条件期望：

$$E_\phi[\cos(\omega t + \phi) \mid \omega] = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t + \phi) \cdot \frac{1}{2\pi} d\phi = 0$$

所以：

$$m_X(t) = 2 \cdot 0 = 0 \quad (\text{常数})$$

2. 验证自相关函数只与时间差有关

$$R_X(s, t) = E[X(s)X(t)] = E[A^2] \cdot E[\cos(\omega s + \phi) \cos(\omega t + \phi)]$$

利用积化和差公式展开：

$$\cos(\omega s + \phi) \cos(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} [\cos(\omega(s - t)) + \cos(\omega(s + t) + 2\phi)]$$

因为 2ϕ 在包含完整周期的区间上对积分贡献为 0，即 $E_\phi[\cos(\omega(s + t) + 2\phi)] = 0$ ，所以：

$$R_X(s, t) = 8 \cdot \frac{1}{2} E_\omega[\cos(\omega(s - t))] = 4 E_\omega[\cos(\omega\tau)] \quad (\text{令 } \tau = s - t)$$

因为 $\omega \sim U(-5, 5)$ ，密度函数为 $\frac{1}{10}$ ，计算关于 ω 的期望：

$$E_\omega[\cos(\omega\tau)] = \int_{-5}^5 \cos(x\tau) \cdot \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10} \left[\frac{\sin(x\tau)}{\tau} \right]_{-5}^5 = \frac{2 \sin(5\tau)}{10\tau} = \frac{\sin(5\tau)}{5\tau}$$

所以：

$$R_X(s, t) = 4 \cdot \frac{\sin(5\tau)}{5\tau}$$

自相关函数只与时间差 $\tau = s - t$ 有关。

3. 检查二阶矩

$$E[X^2(t)] = R_X(t, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{\sin(5\tau)}{5\tau} = 4 < \infty$$

结论：满足所有条件， $X(t)$ 为宽平稳过程。